الفصل الثالث

الإحصـــاء

٣- ١ مقدمة

الإحصاء هو أحد فروع علم الرياضيات و الذي يختص بجمع و تحليل و تلخيص و عرض البيانات للمساعدة في عملية إتخاذ القرار . و يستخدم الإحصاء في جميع مجالات الحياة كالصناعة و الأعمال و التربية و علم الفيزياء و علم الكيمياء و علم الأحياء و الزراعة و دراسة القانون و علم النفس و غيرها من مجالات الحياة الأخرى .

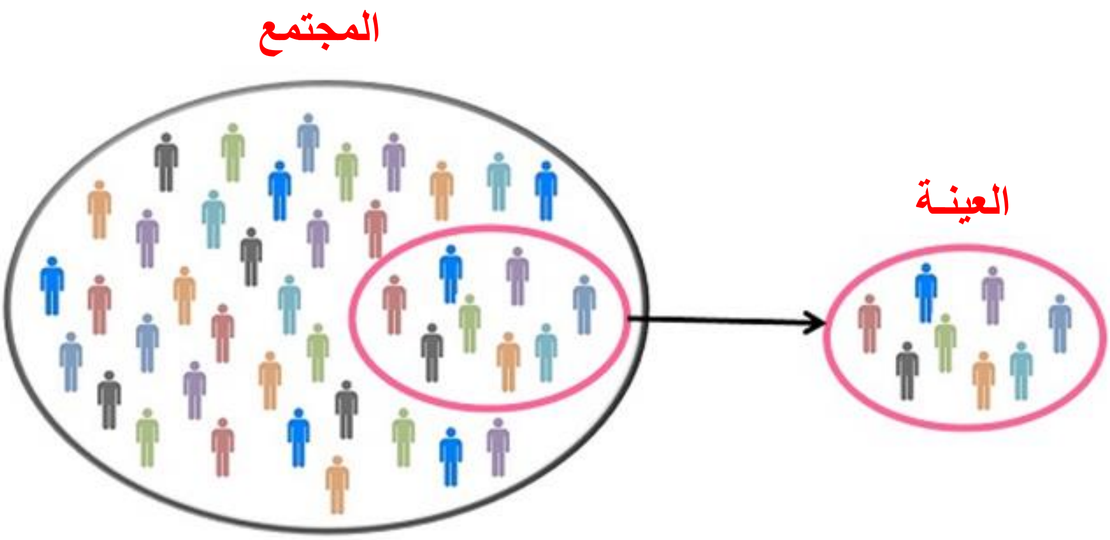
٣- ٢ المجتمع و العينـة

المجتمع هو جميع عناصر المجموعة المطلوب دراستها و إتخاذ قرار أو عمل إستنتاج نهائي بشأنها . و من الأمثلة على المجتمع ما يأتي :

- كل العمانيين الذين تزيد أعمارهم عن 40 سنة .
- كل المرضى الذين تم معالجتهم في إحدى مستشفيات صحار في السنة الماضية .
- كل الإنتاج الذي ينتج في أحد الخطوط الإنتاجية لمعمل منتجات غذائية معين في السلطنة .
- كل الطلاب الذين درسوا مادة الرياضيات في البرنامج التحضيري لجامعة صحار في العام الدراسي 2016 \ 2017 .

أما **العينة** فهي جزء من المجتمع يتم إختياره لغرض إجراء الدراسة المطلوبة . و من الأمثلة على العينة ما يأتي :

- 500 شخص يتم إختيارهم من بين العمانيين الذين تزيد أعمارهم عن 40 سنة .
- 100 من المرضى الذين تم معالجتهم في إحدى مستشفيات صحار في السنة الماضية يتم إختيارهم من أجل الطلب منهم مليء إستبيان الرضا عن أداء هذه المستشفى .
- 80 صندوق من الإنتاج الذي ينتج في أحد الخطوط الإنتاجية لمعمل منتجات غذائية معين في السلطنة .
- 50 طالب من الطلاب الذين درسوا مادة الرياضيات في البرنامج التحضيري لجامعة صحار في العام الدراسي 2016 \ 2017.



٣- ٣ المتغير الإحصائي

المتغير الإحصائي هو إحدى صفات شي ما مطلوب دراستها و تحليلها بإستخدام الإحصاء ، أي إنه يمثل موضوع الدراسة الإحصائية . و من الأمثلة على المتغير الإحصائي ما يأتي :

- درجات طلاب كلية القانون في جامعة صحار في مادة القانون الدولي .
- جنس سكان مدينة الخابورة (ذكر أم أنثى) .
- أعمار طلاب جامعة صحار .
- الربح الشهري لأحد محلات البيع بالتجزئة .
- عدد الحوادث المرورية السنوية في مسقط .

٣ـ ٤ البيانات المُـبَـوَّبـة و البيانات غير المُـبَـوَّبـة

البيانات التي يتم جمعها حول موضوع معين تسمى بيانات غير مبوبة عندما تكون على شكل بيانات خام غير مصنفة الى فئات . فعلى سبيل المثال مجموعة البيانات التالية و التي تخص درجات 50 طالب في الإختبار النهائي لمادة الرياضيات محسوبة من 100 هي مجموعة بيانات غير مبوبة .

55	62	65	59	69	71	74	76	82	84
88	56	67	75	52	88	74	65	55	90
75	66	44	69	66	58	60	84	62	64
70	75	95	66	64	43	35	75	31	64
64	71	73	74	71	65	78	87	50	83

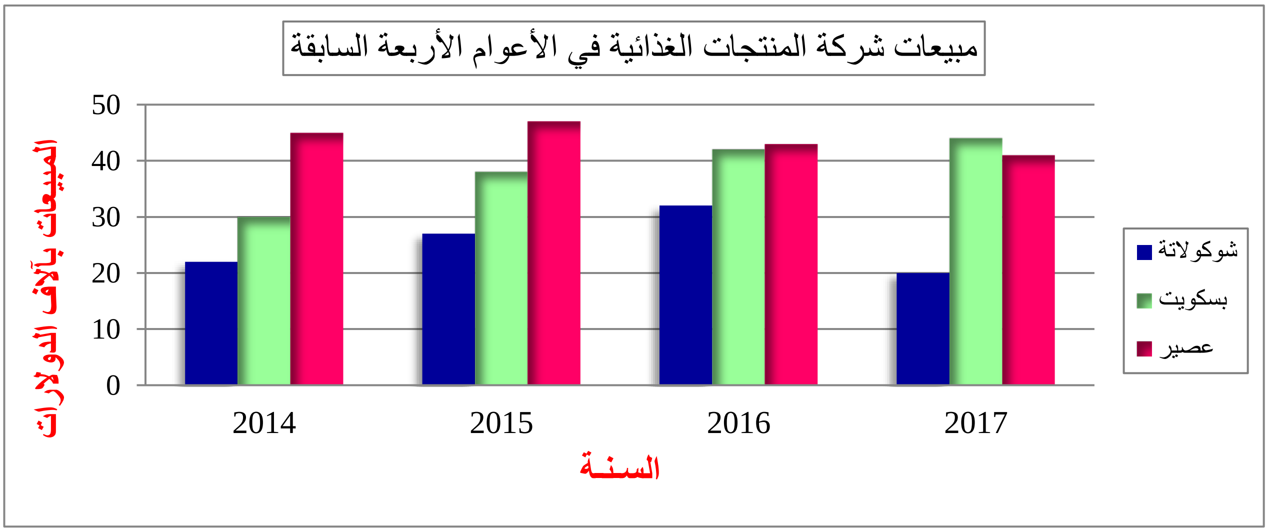
وعند ترتيب البيانات على شكل جدول مكون من عدة فئات مع ذكر التكرار لكل من هذه الفئات فإن البيانات في هذه الحالة تسمى بيانات مبوبة ، كما إن جدول البيانات المبوبة يسمى **التوزيع التكراري** . و الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات الطلاب المبينة في الجدول السابق و المكون من ٧ فئات . (ملاحظة : هذا الجدول و جميع الجداول الأخرى في هذا الفصل تُـقرأ من اليسار الى اليمين)

الفئـة	التكـرار
31 − 40	2
41 − 50	3
51 − 60	7
61 − 70	16
71 − 80	13
81 − 90	8
91 − 100	1
المجموع	50

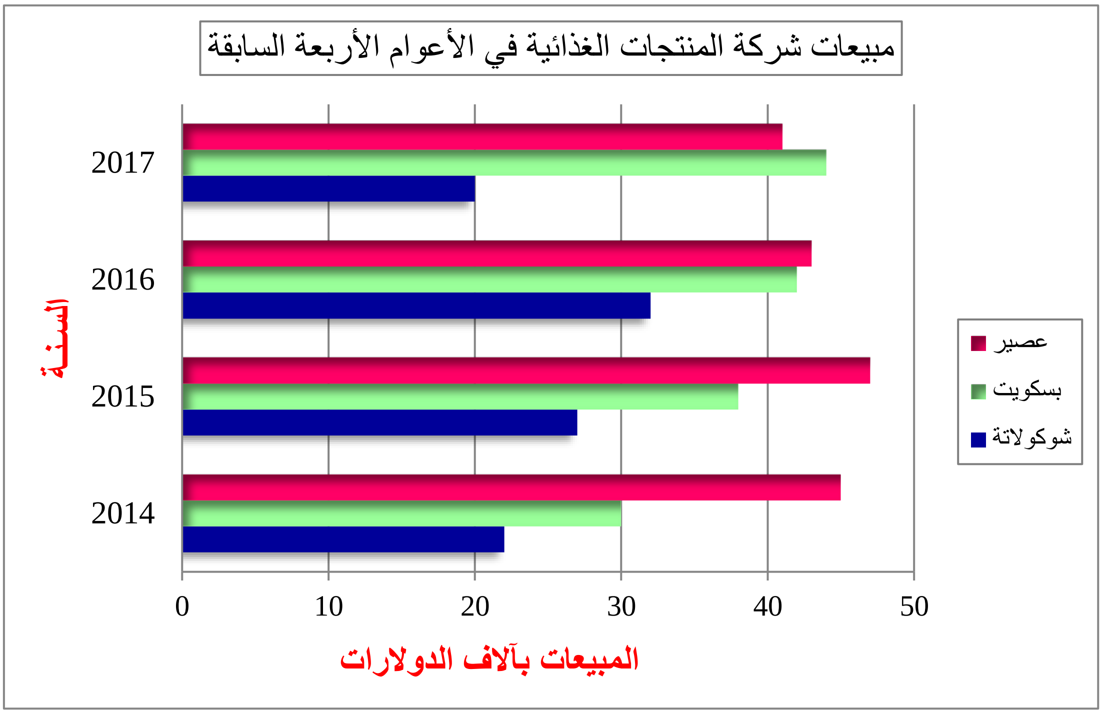
٣ـ ٥ عرض البيانات غير المُـبَـوَّبـة

يمكن عرض البيانات غير المبوبة بعدة طرق من بينها **مخطط الأشرطة** (Bar Chart) **و رسم الفطيرة** (Pie Chart) .

مخطط الأشرطة هو عبارة عن رسم أو مخطط يعبر عن نوع معين أو عدة أنواع من البيانات يتم تمثيلها عل شكل أشرطة حيث يعبر كل شريط عن نوع بيانات معين و يعكس طول الشريط مقدار أو كل من هذه الأنواع . و يمكن رسم هذه الأشرطة عموديا أو أفقيا و كما موضح في الأشكال الآتية.

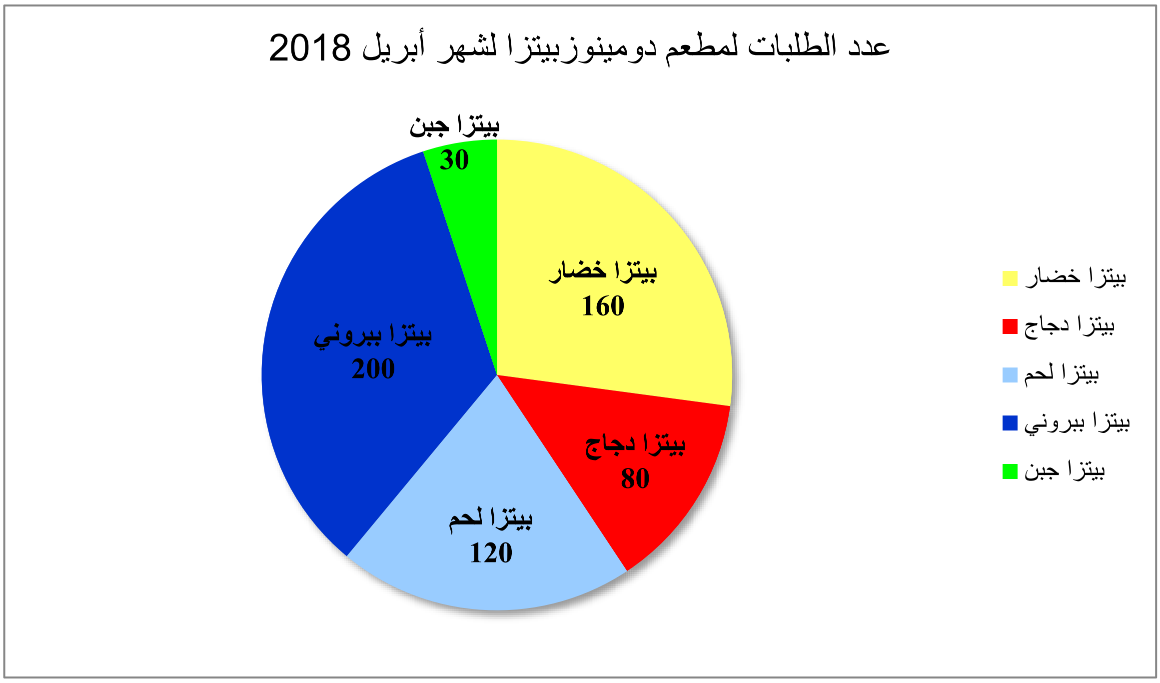


مخطط الأشرطة العمودي



مخطط الأشرطة الأفقي

أما **رسم الفطيرة** فهو عبارة عن رسم دائري مقسم الى عدة أجزاء . و يعبر كل جزء عن نوع معين من البيانات في حين إن الدائرة بأكملها تمثل كل الأنواع أي 100% . و الشكل الآتي هو مثال على رسم الفطيرة .



٣-٦ إعداد التوزيع التكراري

فيما يأتي خطوات إعداد التوزيع التكراري :

١- حدد عدد الفئات المناسب منطقيا للبيانات التي تتم دراستها إذ يجب أن يتناسب عدد الفئات مع عدد القراءات . و يجب التأكد من إنه هناك قراءات لكل فئة من فئات التوزيع التكراري .
٢- جد المدى للقراءات و الذي يساوي الفرق بين أعلى قيمة و أقل قيمة للقراءات .
٣- إقسم المدى الذي تم حسابه في الخطوة ٢ على عدد الفئات الذي فرضته في الخطوة ١ للحصول على طول الفئة .
٤- قرب الناتج للخطوة ٣ الى أقرب عدد صحيح .
٥- أكتب أقل قيمة للقراءات على إنها الحد الأدنى للفئة الأولى ، ثم أضف إليه طول الفئة من الخطوة ٤ للحصول على الحد الأدنى للفئة الثانية .
٦- كرر عملية إضافة طول الفئة الى الحد الأدنى للفئة الحالية للحصول على الحد الأدنى للفئة اللاحقة لحين الحصول على عدد فئات مساو لذلك الذي تم تقديره في الخطوة ١ .
٧- إحسب الحد الأعلى لفئات التوزيع التكراري و ذلك من خلال إضافة طول الفئة الى الحد الأدنى لكل فئة و طرح ١ من الناتج .
٨- إحسب نهايات كل فئة و ذلك من خلال طرح 0.5 من الحد الأدنى للفئة للحصول على النهاية الصغرى لها و إضافة 0.5 للحد الأعلى للفئة للحصول على نهايتها العليا .
٩- إحسب عدد القيم الواقعة ضمن كل فئة و التي تمثل التكرارات لهذا التوزيع التكراري .

وبتطبيق هذه الخطوات على مجموعة درجات الطلاب في الإختبار النهائي لمادة الرياضيات و الموضحة في الفقرة ٣-٤ من هذا الفصل فإنه سينتج التوزيع التكراري النهائي لهذه البيانات و المبين الجدول التالي :

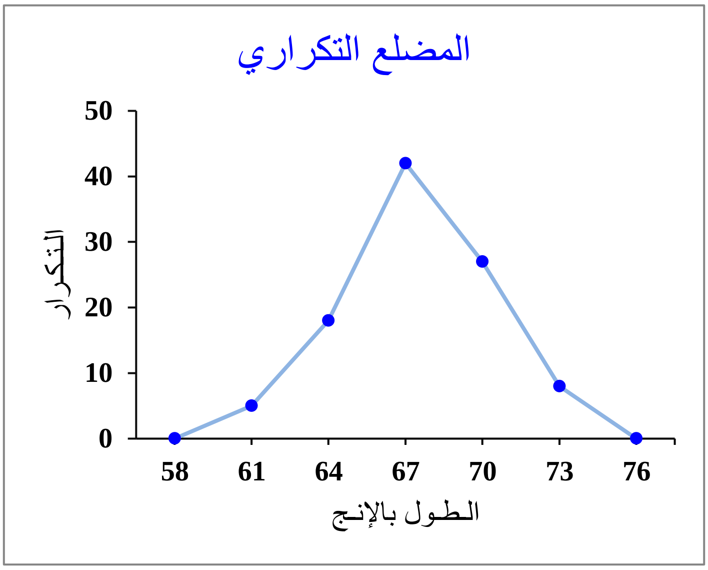
نهايات الفئة	التكرار	الفئة
30.5 – 40.5	2	31 – 40
40.5 – 50.5	3	41 – 50
50.5 – 60.5	7	51 – 60
60.5 – 70.5	16	61 – 70
70.5 – 80.5	13	71 – 80
80.5 – 90.5	8	81 – 90
90.5 – 100	1	91 – 100
	50	المجموع

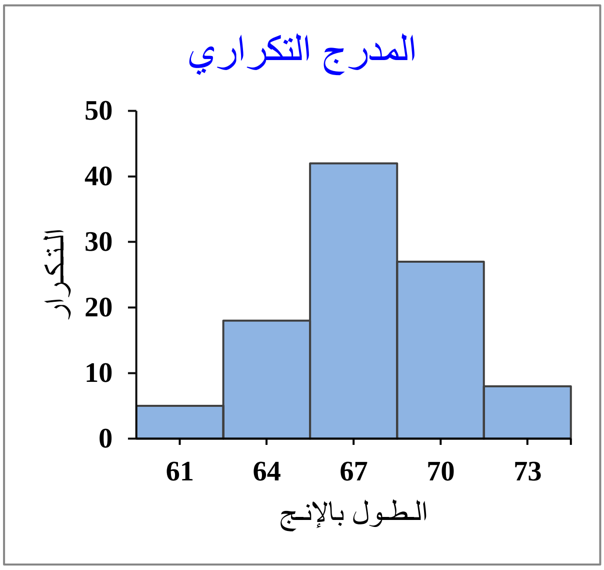
٣-٧ عرض البيانات المُبَوَّبة

يتم عرض البيانات المبوبة على شكل **المدرج التكراري** و **المضلع التكراري** . الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأطوال 100 طالب من طلاب جامعة صحار مقاسة لأقرب إنج .

عدد الطلاب	الطول (إنج)
5	60 – 62
18	63 – 65
42	66 – 68
27	69 – 71
8	72 – 74
100	المجموع

المدرج التكراري و التوزيع التكراري موضحان في الشكلين الآتيين :





مثال ١ تم قياس درجة الذكاء لعينة مكونة من 17 شخص و كانت النتائج كما يأتي :

118 ، 123 ، 124 ، 125 ، 127 ، 128 ، 129 ، 130 ، 130 ، 133 ، 136 ، 138 ، 141 ، 142 ، 149 ، 150 ، 154 .

قم بإعداد (أ) توزيع تكراري لهذه البيانات مكون من ٥ فئات (ب) المدرج التكراري (جـ) المضلع التكراري .

الحل (أ) التوزيع التكراري

الخطوة الأولى : التوزيع التكراري سيتكون من ٥ فئات .

الخطوة الثانية : المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

المدى = ١٥٤ – ١١٨ = ٣٦

الخطوة الثالثة : طول الفئة = المدى ÷ عدد الفئات

طول الفئة = ٣٦ ÷ ٥ = ٧,٢

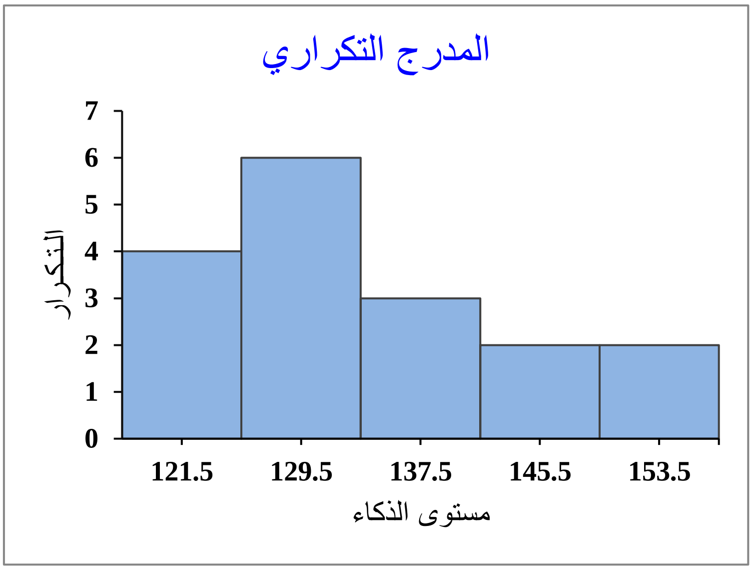
الخطوة الرابعة : طول الفئة = ٨ (تقريب ناتج الخطوة السابقة لأقرب عدد صحيح)

الخطوات الخامسة و السادسة و السابعة و الثامنة و التاسعة هي كما موضح في الجدول الآتي :

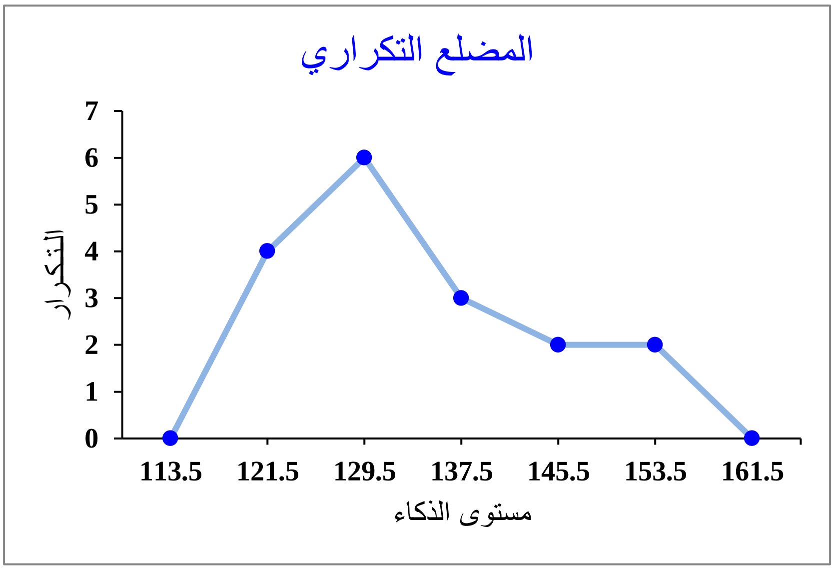
الفئة	نهايات الفئة	التكرار
118 – 125	117.5 – 125.5	4
126 – 133	125.5 – 133.5	6
134 – 141	133.5 – 141.5	3
142 – 149	141.5 – 149.5	2
150 – 157	149.5 – 157.5	2
	المجموع	17

(ب) المدرج التكراري

الفئـة	مركـز الفئـة	التكـرار
118 – 125	121.5	4
126 – 133	129.5	6
134 – 141	137.5	3
142 – 149	145.5	2
150 – 157	153.5	2



(ب) المضلع التكراري



٣-٨ مقاييس التمركز للبيانات غير المُبَوَّبة

يتم قياس تمركز البيانات الإحصائية من خلال حساب أحد مقاييس التمركز و التي هي : **المتوسط الحسابي** و **الوسيط** و **المنوال** .

- المتوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة يتم حسابه من القانون الآتي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

حيث أن $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي و $\sum x$ هو مجموع القيم و n هو عدد القيم

- الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم الإحصائية في حالة إن عدد القيم فردي . إما إذا كان عدد القيم زوجي فإن الوسيط يساوي المتوسط الحسابي للقيمتين الوسطيتين .

- المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً من بين قيم مجموعة البيانات الإحصائية . و إذا لم تكن هذه القيمة موجودة فإن مجموعة البيانات الإحصائية في هذه الحالة لا تمتلك منوالاً . أما إذا إحتوت مجوعة البيانات الإحصائية على قيمتين ذات تكرار متساوي و في نفس الوقت أعلى من تكرارات باقي البيانات فإن مجموعة البيانات في هذه الحالة تسمى ثنائية المنوال , وفي حال إحتوائها على ثلاث قيم من هذا النوع فإنها تسمى ثلاثية المنوال .

مثال ٢ إحسب المتوسط الحسابي لمجموعة البيانات الآتية : 6 ، 8 ، 19 ، 14 ، 4 ، 11 ، 15

الحل

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6+8+19+14+4+11+15}{7} = \frac{77}{7} = 11$$

مثال ٣ حصل أحمد على الدرجات الآتية في 4 إختبارات متساوية الوزن لمادة الرياضيات : 82 ، 90 ، 88 ، 85 . جد المتوسط الحسابي لدرجات أحمد في مادة الرياضيات .

الحل

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{82+90+88+85}{4} = \frac{345}{4} = 86.25$$

مثال ٤ جد الوسيط لمجموعة البيانات الآتية : 5 ، 7 ، 19 ، 12 ، 4 ، 11 ، 15

الحل بترتيب البيانات تصاعديا نحصل على الآتي :

4 ، 5 ، 7 ، **11** ، 12 ، 15 ، 19

القيمة الوسطية بعد الترتيب هي 11 ، لذلك فإن الوسيط هو 11 .

مثال ٥ جد الوسيط لمجموعة البيانات الآتية : 5 ، 7 ، 19 ، 12 ، 4 ، 11 ، 15 ، 13

الحل بترتيب البيانات تصاعديا نحصل على الآتي :

4 ، 5 ، 7 ، **11** ، **12** ، 13 ، 15 ، 19

بما إنه توجد قيمتان وسطيتان و هما 11 و 12 ، فإن الوسيط يساوي متوسطهما الحسابي و الذي هو 11.5 .

مثال ٦ جد المنوال لمجموعة البيانات الآتية : 5 ، 7 ، 9 ، 12 ، 9 ، 11 ، 15

الحل العدد 9 هو الوحيد من بين عناصر هذه المجموعة الذي يتكرر مرتين ، لذا فإن المنوال هو 9 .

مثال ٧ جد المنوال لمجموعة البيانات الآتية : 5 ، 7 ، 19 ، 12 ، 4 ، 11 ، 15

الحل لا يوجد عنصر من عناصر هذه المجموعة يتكرر لأكثر من مرة واحدة ، لذا فإن هذه المجموعة ليس لها منوال .

مثال ٨ جد المنوال لمجموعة البيانات الآتية : 5 ، 7 ، 9 ، 12 ، 9 ، 11 ، 5

الحل العددان 5 و 9 يتكرران مرتين ، لذا فإن لهذه المجموعة منوالان و هما 5 و 9 و المجموعة هي ثنائية المنوال .

٣ـ ٩ مقاييس التمركز للبيانات المُبَوَّبة

يتم حساب المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة على شكل توزيع تكراري من القانون الآتي :

$$\bar{x} = \frac{\sum f.\ x}{\sum f}$$

$$\bar{x} = \frac{f_1.x_1 + f_2.x_2 + \dots + f_n.x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

مثال ٩ الجدول الآتي يضم التوزيع التكراري لأسعار السلع (بالريال العماني) التي تم بيعها في أحد المحال التجارية خلال عطلة نهاية الإسبوع . إحسب المتوسط الحسابي لأسعار هذه السلع .

التكرار (عدد السلع التي تم بيعها)	الفئـــة (السعر بالريال العماني)
8	1 − 5
6	6 − 10
4	11 − 15
2	16 − 20
4	21 − 25
6	26 − 30
2	31 − 35

الحل الحسابات الخاصة بإيجاد المتوسط الحسابي هي كما موضح في الجدول الآتي :

الفئـة	التكرار (f)	مركز الصنف (x)	$f \cdot x$
1 − 5	8	3	24
6 − 10	6	8	48
11 − 15	4	13	52
16 − 20	2	18	36
21 − 25	4	23	92
26 − 30	6	28	168
31 − 35	2	33	66

$\sum f = 32$ $\qquad\qquad$ $\sum f \cdot x = 486$

$$\bar{x} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \frac{486}{32} = 15.19$$

٣-١٠ الإنحراف المعياري للبيانات غير المُبَوَّبة

الإنحراف المعياري لمجموعة بيانات إحصائية هو مقياس لإنتشار هذه البيانات حول أحد مقاييس التمركز لها و الذي عادة ما يكون المتوسط الحسابي . و يتم حساب الإنحراف المعياري عن المتوسط الحسابي لبيانات العينة غير المبوبة من القانون الآتي :

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث أن $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة و s هو إنحرافها المعياري .

مثال ١٠ إحسب الإنحراف المعياري عن المتوسط الحسابي لبيانات العينة الآتية : 5 ، 6 ، 8 ، 4 ، 10 ، 3 .

الحل أولا يجب حساب الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{5+6+8+4+10+3}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

أما باقي الحسابات فهي كما مبين في الجدول اللآتي :

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
5	- 1	1
6	0	0
8	2	4
4	- 2	4
10	4	16
3	- 3	9
	$\sum (x - \bar{x}) = 0$	$\sum (x - \bar{x})^2 = 34$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{34}{5}} = 2.61$$

٣-١١ الإنحراف المعياري للبيانات المُبَوَّبة

يتم حساب الإنحراف المعياري عن المتوسط الحسابي لبيانات العينة المبوبة من القانون الآتي :

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث أن $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة و f هو التكرار و s هو الإنحراف المعياري للعينة .

مثال ١١ إحسب الإنحراف المعياري عن المتوسط الحسابي لبيانات العينة العشوائية الآتية التي تضم أطوال مجموعة مكونة من 100 طالب من طلاب جامعة صحار الذكور مقاسة بالإنج .

طول الطالب (بالإنج)	التكرار (عدد الطلاب)
60 − 62	5
63 − 65	18
66 − 68	42
69 − 71	27
72 − 74	8

الحل الجدول الآتي يتضمن جميع الحسابات الخاصة بحساب الإنحراف المعياري لهذه العينة :

طول الطالب (بالإنج)	التكرار (f)	مركز الصنف (x)	$f\,.\,x$	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
60 − 62	5	61	305	- 6.45	41.6025	208.0125
63 − 65	18	64	1152	- 3.45	11.9025	214.2450
66 − 68	42	67	2814	- 0.45	0.2025	8.5050
69 − 71	27	70	1890	2.55	6.5025	175.5675
72 − 74	8	73	584	5.55	30.8025	246.4200
	$n=\sum f=100$		$\sum f.\ x = 6745$			$\sum f(x-\bar{x})^2 = 852.75$

$$\bar{x} = \frac{\sum f.\ x}{\sum f} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{852.75}{100-1}} = 2.93$$